JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 31, 90–96 (1981)

Über die Konvergenz positiver Operatoren mit Werten in atomaren Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm

EGON SCHEFFOLD

Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, BRD-6100 Darmstadt, West Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received September 19, 1979

Let E be a Banach lattice with a quasi-interior point u and let F be an atomic Banach lattice with order continuous norm. Furthermore let $\{T_i: i \in I\}$ be an equicontinuous net of positive linear operators from E into F, and let S be a positive linear operator from E into F. Among other things it is shown that $\lim_i T_i u = Su$ and $\lim_i \delta(T_i x) = \delta(Sx)$ for all elements $x \in E$ and all real lattice homomorphisms δ on F implies $\lim_i T_i x = Sx$ for all $x \in E$.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Frage, wann bei positiven Operatoren die Konvergenz in einer schwächeren Topologie unter einer zusätzlichen geringfügigen Voraussetzung die Konvergenz in einer stärkeren Topologie zur Folge hat. Es zeigt sich, daß in diesem Zusammenhang Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm eine Rolle spielen. Was die Bezeichnungen und die Terminologie betrifft, halten wir uns eng an Schaefer [4].

Es sei E ein archimedischer Vektorverband, dessen positiven Kegel wir mit E_+ bezeichnen. Ein Element $u \in E_+$ heißt Atom, falls das von u erzeugte Hauptideal eindimensional ist. Der Vektorverband E selbst wird atomar genannt, falls in E ein maximales Orthogonalsystem existiert, welches aus lauter Atomen besteht. Bei der folgenden Untersuchung erweisen sich die atomaren Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm als besonders günstig, weil ihre reellen Verbandshomomorphismen die Punkte trennen und ordnungsstetig sind. Die bekanntesten Beispiele für atomare Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm sind die Folgenräume l^p $(1 \leqslant p < \infty)$ und c_0. Den topologischen Dual (dualen Banachverband) eines Banachverbandes E bezeichnen wir mit E'. Unser Konvergenzsatz für atomare Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm lautet nun wie folgt:

0021-9045/81/010090-07$02.00/0

THEOREM 1. *Es sei E ein Banachverband, F ein atomarer Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, V eine Menge reeller Verbandshomomorphismen auf F, welche die Punkte von F trennt, und M eine nichtleere Teilmenge von E mit $\{\mu \in E'_+ : \mu \equiv 0$ auf $M\} = \{0\}$.*

Ferner sei $\{T_i : i \in I\}$ ein gleichstetiges Netz positiver linearer Operatoren und S ein positiver linearer Operator von E nach F, so daß $\lim_i T_i y = Sy$ für alle $y \in M$ und $\lim_i \delta(T_i x) = \delta(Sx)$ für alle $x \in E$ und $\delta \in V$ gilt. Dann ist $\lim_i T_i x = Sx$ für alle $x \in E$.

Beweis. Es sei M_0 die lineare Hülle von M. Aus bekannten Trennungssätzen (siehe [2, S. 82, 3.1.6]) ergibt sich, daß die Bedingung $\{\mu \in E'_+ : \mu \equiv 0$ auf $M\} = \{0\}$ die Beziehungen $\overline{M_0 - E_+} = E$ und $\overline{M_0 + E_+} = E$ impliziert, wobei $\bar{B}$ die abgeschlossene Hülle einer Menge B bezeichnet.

Es sei $z \in E_+$. Da F ordnungsvollständig ist, existieren in F die Elemente $z_i := \inf\{T_j z : j \in I$ und $j \geqslant i\}$ für alle $i \in I$. Das Netz $\{z_i : i \in I\}$ ist nach oben gerichtet. Aus $\lim_i \delta(T_i z) = \delta(Sz)$ für alle $\delta \in V$ folgt $\delta(z_i) \leqslant \delta(Sz)$ für alle $\delta \in V$. Da V die Punkte trennt, bedeutet dies $0 \leqslant z_i \leqslant Sz$ für alle $i \in I$.

Sei nun $\tilde{z} := \sup\{z_i : i \in I\}$. Da jedes $\delta \in V$ ordnungsstetig ist und da $\lim_i \delta(T_i z) = \delta(Sz)$ ist, ergibt sich $\delta(\tilde{z}) = \delta(Sz)$ für alle $\delta \in V$. Es ist also $\tilde{z} = Sz$. Da die Norm ordnungsstetig ist, erhalten wir $\lim_i z_i = Sz$. Aus $z_i \leqslant T_i z$ folgt hieraus $\lim_i (T_i z - Sz)^- = 0$. Es gilt also $\lim_i (T_i x - Sx)^- = 0$ für alle $x \in E_+$ und $\lim_i (T_i x - Sx)^+ = \lim_i (T_i(-x) - S(-x))^- = 0$ für alle $x \in -E_+$.

Da $\lim_i T_i y = Sy$ für alle $y \in M_0$ gilt, ergibt sich nun $\lim_i (T_i x - Sx)^- = 0$ für alle $x \in \overline{M_0 + E_+} (=E)$ und $\lim_i (T_i x - Sx)^+ = 0$ für alle $x \in \overline{M_0 - E_+} (=E)$. Dies bedeutet $\lim_i T_i x = Sx$ für alle $x \in E$. Q.E.D.

Ein positives Element v eines Banachverbandes G heißt quasiinnerer Punkt von G, falls das von v erzeugte Hauptideal dicht in G ist. Es ist klar, daß jeder quasiinnere Punkt, als einpunktige Menge betrachtet, die in Theorem 1 geforderte Eigenschaft der Teilmenge M besitzt.

KOROLLAR 2. *Es sei E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt u, F ein atomarer Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und V eine Menge reeller Verbandshomomorphismen auf F, welche die Punkte von F trennt. Es sei $\{T_i : i \in I\}$ ein gleichstetiges Netz positiver linearer Operatoren und S ein positiver linearer Operator von E nach F, so daß gilt:*

(i) $\lim_i T_i u = Su$ *und*

(ii) $\lim_i \delta(T_i x) = \delta(Sx)$ *für alle $x \in E$ und alle $\delta \in V$.*

Dann gilt $\lim_i T_i x = Sx$ für alle $x \in E$.

Im Falle $E = F = l^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ können wir zum Beispiel für u die Folge

$(k^{-(p+1)})$ und für V die Menge der Koordinatenfunktionale δ_n $(n \in \mathbb{N})$ wählen $(\delta_n(x_k) = x_n$ für alle $(x_k) \in l^p)$.

Korollar 2 besagt, daß bei Vorliegen der punktweisen Konvergenz auf den reellen Verbandshomomorphismen die Konvergenz in der Normtopologie in einem einzigen quasiinneren Punkt getestet werden kann. Wir wollen bemerken, daß die angegebene punktweise Konvergenz auf den reellen Verbandshomomorphismen stets schwächer ist als die Konvergenz in der schwachen Topologie, z.B. echt schwächer im Banachverband l^1.

In Theorem 1 kann man auf die Ordnungsstetigkeit der Norm nicht verzichten, wie das folgende Gegenbeispiel in dem ordnungsvollständigen, atomaren Banachverband l^∞ zeigt.

GEGENBEISPIEL 3. Wir identifizieren den Banachverband l^∞ mit dem Banachverband $C(\beta\mathbb{N})$ der reellwertigen, stetigen Funktionen auf der Stone–Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Es sei $t_0 \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $\varphi_n : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &:= t_0 \qquad \text{für} \quad t \in \beta\mathbb{N} \text{ und } t \neq n \\ &:= 1 \qquad \text{für} \quad t = n. \end{aligned}$$

Dann ist jedes φ_n eine stetige Abbildung von $\beta\mathbb{N}$ in sich, und die Abbildungen T_n, definiert durch $T_n f := f \circ \varphi_n$ für alle $f \in C(\beta\mathbb{N})$, sind lineare Verbandshomomorphismen von $C(\beta\mathbb{N})$ mit $T_n e = e$, wobei e die Einsfunktion auf $\beta\mathbb{N}$ bezeichnet. Als S wählen wir die Abbildung $f \to Sf := f(t_0)e$ für alle $f \in C(\beta\mathbb{N})$. Dann gilt $T_n e = e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}(T_n f)(t) = (Sf)(t)$ für alle $f \in C(\beta\mathbb{N})$ und alle $t \in \beta\mathbb{N}$. Aber für die Funktion $g \in C(\beta\mathbb{N})$ mit $g(k) := 1 - 1/k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\|T_n g - Sg\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die klassischen Integrationsräume $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ der Lebesgue integrierbaren, reellwertigen Funktionen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen haben zwar eine ordnungsstetige Norm, aber keine reellen Verbandshomomorphismen. Will man diese Banachverbände als Bildräume nehmen und für diese Räume eine dem Theorem 1 entsprechende Aussage erhalten, so muß man die punktweise Konvergenz auf den reellen Verbandshomomorphismen durch eine andere Konvergenzart ersetzen.

Das nächste Theorem zeigt, daß man für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Ordnungsintervallen des Duals und die identische Abbildung ein solches Ergebnis beweisen kann.

Es sei E ein Banachverband. Unter der Topologie $o(E, E')$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den Ordnungsintervallen des Duals E' versteht man diejenige Topologie auf E, welche durch die Verbandshalbnormen p_μ $(\mu \in E'_+)$ erzeugt wird, wobei $p_\mu(x) := \mu(|x|)$ für alle $x \in E$ ist (s. Peressini [3, Kap 3, §2] und Schaefer [4, Kap. II, Exerc. 28]).

Die Topologie $o(E, E')$ ist unter allen lokalkonvexen Topologien, welche feiner als die schwache Topologie $\sigma(E, E')$ sind, die gröbste, in der die Verbandsoperationen stetig sind.

THEOREM 4. *Es sei E ein reflexiver Banachverband oder ein separabler Banachverband mit ordnungsstetiger Norm. Es sei u ein quasiinnerer Punkt von E und* (T_n) *eine Folge positiver Endomorphismen von E mit den beiden folgenden Eigenschaften*:

(i) $\lim_{n\to\infty} T_n u = u$ *in der Normtopologie und*

(ii) $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ *für alle* $x \in E$ *in der Topologie* $o(E, E')$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ *für alle* $x \in E$ *in der Normtopologie.*

Beweis. Es genügt, die Konvergenzaussage für positive Elemente zu beweisen. Es sei $x \in E_+$. Wir nehmen an, die Folge $(T_n x)$ konvergiere nicht gegen x, und führen diese Annahme wie folgt zu einem Widerspruch.

Dann gibt es ein $r > 0$, eine Teilfolge (n_j) der Folge (n) und Punkte $\mu_{n_j} \in E'_+$ mit $\|\mu_{n_j}\| \leqslant 1$ und

$$|\mu_{n_j}(T_{n_j} x) - \mu_{n_j}(x)| \geqslant r \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Nach den über E gemachten Voraussetzungen sind in E' die abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen $\sigma(E', E)$-folgenkompakt. Aufgrund der Eigenschaft (ii) ist die Folge (T_n) nach dem Satz von Banach–Steinhaus gleichstetig. Es gibt daher eine Teilfolge (n_k) der Folge (n_j) und eine Teilfolge (n_l) der Folge (n_k), so daß in der Topologie $\sigma(E', E)$ die Folge (μ_{n_k}) gegen ein $\mu_0 \in E'_+$ und die Folge $(T'_{n_l} \mu_{n_l})$ gegen ein $\mu_1 \in E'_+$ konvergiert, wobei wir mit T'_{n_l} die adjungierten Operatoren von T_{n_l} bezeichnen.

Wenn wir zeigen können, daß $\mu_1 = \mu_0$ ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}|\mu_{n_l}(T_{n_l} x) - \mu_{n_l}(x)| &= |\mu_{n_l}(T_{n_l} x) - \mu_1(x) + \mu_0(x) - \mu_{n_l}(x)| \\ &\leqslant |T'_{n_l} \mu_{n_l}(x) - \mu_1(x)| + |\mu_{n_l}(x) - \mu_0(x)|\end{aligned}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Da aber die rechte Seite dieser Ungleichung beliebig klein gemacht werden kann, haben wir dann den gewünschten Widerspruch zur Ungleichung $(*)$.

Aus $\lim_{l\to\infty} T_{n_l} u = u$ und der Abschätzung $|\mu_1(u) - \mu_0(u)| \leqslant |\mu_1(u) - T'_{n_l} \mu_{n_l}(u)| + |T_{n_l} \mu_{n_l}(u) - \mu_{n_l}(u)| + |\mu_{n_l}(u) - \mu_0(u)|$ für alle $l \in \mathbb{N}$ folgt $\mu_1(u) = \mu_0(u)$. Da u ein quasiinnerer Punkt ist, erhalten wir also $\mu_1 = \mu_0$, wenn wir zeigen können, daß $\mu_1 \geqslant \mu_0$ ist.

Es sei $z \in E_+$. Aus $\lim_{n\to\infty} T_n z = z$ in der Topologie $o(E, E')$ folgt $\lim_{l\to\infty} \mu_0(|T_{n_l} z - z|) = 0$. Es gibt nun eine Teilfolge (n_m) der Folge (n_l) mit

$\mu_0(|T_{n_{m+1}}z - T_{n_m}z|) \leqslant 2^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die im folgenden auftauchenden Indizes n_i und n_s gehören stets zu der Teilfolge (n_m).

Für alle $i, r, m \in \mathbb{N}$ mit $r > m$ und $r \geqslant i \geqslant m$ gilt

$$|T_{n_i}z - T_{n_m}z| \leqslant \sum_{s=m+1}^{s=r} |T_{n_s}z - T_{n_{s-1}}z|,$$

$$0 \leqslant T_{n_m}z - \inf_{r \geqslant i \geqslant m} \{T_{n_i}z\} \leqslant \sup_{r \geqslant i \geqslant m} \{|T_{n_i}z - T_{n_m}z|\}$$

$$\leqslant \sum_{s=m+1}^{s=r} |T_{n_s}z - T_{n_{s-1}}z|$$

und

$$0 \leqslant \mu_0(T_{n_m}z) - \mu_0\left(\inf_{r \geqslant i \geqslant m} \{T_{n_i}z\}\right)$$

$$\leqslant \sum_{s=m+1}^{s=r} \mu_0(|T_{n_s}z - T_{n_{s-1}}z|). \tag{1}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei nun $s_m := \inf\{T_{n_i}z\colon \ i \geqslant m\}$. Dann gilt $s_m = \inf_{r>m}\{\inf_{r \geqslant i \geqslant m}\{T_{n_i}z\}\}$, und die Folge $(\inf_{r \geqslant i \geqslant m}\{T_{n_i}z\})_{r>m}$ ist monoton fallend. Da die Linearform μ_0 ordnungsstetig ist, ergibt sich aus der Ungleichung (1) die Abschätzung

$$0 \leqslant \mu_0(T_{n_m}z) - \mu_0(s_m)$$

$$\leqslant \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu_0(|T_{n_s}z - T_{n_{s-1}}z|) \leqslant 2^{1-m} \tag{2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aus $\lim_{m\to\infty} \mu_0(|T_{n_m}z - z|) = 0$ erhalten wir $\mu_0(z) = \lim_{m\to\infty} \mu_0(T_{n_m}z)$. Aus der Ungleichung (2) ergibt sich dann $\lim_{m\to\infty} \mu_0(s_m) = \mu_o(z)$. Nun gilt $\mu_1(z) = \lim_{m\to\infty} \mu_{n_m}(T_{n_m}z)$. Für festes $m_0 \in \mathbb{N}$ ist $T_{n_m}z \geqslant s_{m_0}$ für alle $m \geqslant m_0$, also $\mu_{n_m}(T_{n_m}z) \geqslant \mu_{n_m}(s_{m_0})$ für alle $m \geqslant m_0$. Hieraus folgt $\mu_1(z) \geqslant \mu_0(s_{m_0})$. Aus $\lim_{m\to\infty} \mu_0(s_m) = \mu_0(z)$ ergibt sich dann $\mu_1(z) \geqslant \mu_0(z)$. Q.E.D.

An dieser Stelle wollen wir das folgende Ergebnis von R. L. James über die Banachverbände $L^p[0, 1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ erwähnen (s. [1, Theorem 5.3]):

Es sei (T_n) eine gleichstetige Folge positiver Endomomorphismen von $L^p[0, 1]$. Ferner konvergiere $T_n e$ gegen e $(e(t) \equiv 1)$ in der Normtopologie und $T_n x$ gegen x in der schwachen Topologie für die beiden Funktionen $x(t) = t$ und $x(t) = t^2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$ für alle $x \in L^p[0, 1]$.

Zum Schluß bringen wir noch eine Anwendung von Theorem 1 für den Fall, daß auch auf den Urbildräumen die reellen Verbandshomomorphismen die Punkte trennen. Dabei spielt die eindeutige Fortsetzbarkeit von Linearformen eine Rolle (wie in Scheffold [5]).

SATZ 5. *Es sei E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt u und der Eigenschaft, daß die Menge $V(E)$ der reellen Verbandshomomorphismen auf E die Punkte trennt. Es sei G eine nichtleere Teilmenge von E und es gelte*

$$E = \{x \in E: \mu \in E'_+, \delta \in V(E) \textit{ und } \mu(y) = \delta(y) \textit{ für alle } y \in G \textit{ impliziert } \mu(x) = \delta(x)\}.$$

Ferner sei F ein atomarer Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und V eine Menge reeller Verbandshomomorphismen auf F, welche die Punkte trennt.

Es sei $\{T_i: i \in I\}$ ein gleichstetiges Netz positiver linearer Operatoren und S ein linearer Verbandsoperator von E nach F, so daß gilt:

(i) $\lim_i T_i u = Su$ *und*

(ii) $\lim_i \delta(T_i y) = \delta(Sy)$ *für alle* $y \in G$ *und alle* $\delta \in V$.

Dann gilt $\lim_i T_i x = Sx$ *für alle* $x \in E$.

Beweis. Nach Korollar 2 genügt es zu zeigen, daß die dort angegebene Voraussetzung (ii) erfüllt ist.

Sei $x \in E$ und $\delta \in V$. Wir nehmen an, es gelte nicht $\lim_i \delta(T_i x) = \delta(Sx)$.

Dann gibt es ein $r > 0$ und ein Teilnetz $\{T_j: j \in J\}$ von $\{T_i: i \in I\}$ mit $(*)$ $|\delta(T_j x) - \delta(Sx)| \geqslant r$ für alle $j \in J$. Ferner existiert ein Teilnetz $\{T_k: k \in K\}$ von $\{T_j: j \in J\}$, so daß das Netz $\{T'_k \delta: k \in K\}$ in der Topologie $\sigma(E', E)$ gegen ein $\nu \in E'_+$ konvergiert. Für $y \in G$ gilt nun die Abschätzung

$$|\nu(y) - (S'\delta)(y)| \leqslant |\nu(y) - (T'_k\delta)(y)| + |(T'_k\delta)(y) - (S'\delta)(y)|$$

für alle $k \in K$. Aufgrund der Voraussetzung (ii) des Satzes folgt hieraus $\nu(y) = (S'\delta)(y)$ für alle $y \in G$, und es ist $S'\delta \in V(E)$. Die über G gemachte Voraussetzung bedeutet dann $\nu = S'\delta$. Es gilt daher $(S'\delta)(x) = \lim_k (T'_k\delta)(x)$, was ein Widerspruch zur Ungleichung $(*)$ ist. Es ist also $\lim_i \delta(T_i x) = \delta(Sx)$.

Q.E.D.

Es sei $E = F = l^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Dann können wir zum Beispiel für u die Folge (e^{-n}) und für G die dreipunktige Menge $\{g_i: i = 0, 1, 2\}$ wählen, wobei g_i diejenige Folge ist, deren $k$te Koordinate $(g_i)_k$ gleich $k^i e^{-k}$ ist. Satz 5 bedeutet dann zum Beispiel: Ist (T_n) eine gleichstetige Folge positiver Endomorphismen des Banachverbandes l^p $(1 \leqslant p < \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n g_0 = g_0$ und $\lim_{n\to\infty} (T_n g_i)_k = k^i e^{-k}$ für $i = 1, 2$ und alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} T_n f = f$ für alle $f \in l^p$.

LITERATUR

1. R. L. JAMES, The extension and convergence of positive operators, *J. Approx. Theory* 7 (1973), 186–197.

2. G. JAMESON, "Ordered Linear Spaces," Lecture Notes in Mathematics No. 141, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
3. A. L. PERESSINI, "Ordered Topological Vector Spaces," Harper & Row, New York/Evanston/London, 1967.
4. H. H. SCHAEFER, "Banach Lattices and Positive Operators," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
5. E. SCHEFFOLD, Über Konvergenz linearer Operatoren, Mathematica, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* **20** (43) (1978), 193–198.